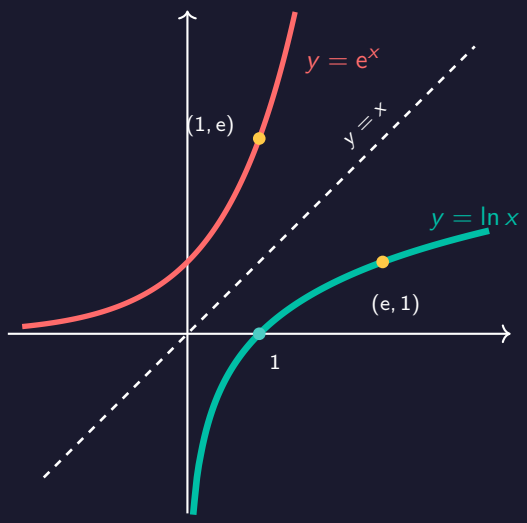
FICHE 11

Logarithme népérien

Définition & propriétés ▪ Étude de fonction ▪ Croissances comparées



Terminale — Spécialité Mathématiques — Programme officiel

Table des matières

1 Pourquoi étudier le logarithme ? 3
1.1 Le problème fondamental . . . 3
1.2 L'idée directrice . . . 3

2 L'idée avant la formule 4
2.1 La question fondatrice . . . 4
2.2 Le logarithme transforme les produits en sommes . . . 4
2.3 Graphiquement : le miroir de l'exponentielle . . . 4

3 Le cours formel 5
3.1 Définition du logarithme népérien . . . 5
3.2 Propriétés algébriques . . . 5
3.3 Signe du logarithme . . . 7
3.4 Étude complète de la fonction ln . . . 7
3.5 Limites de référence . . . 8
3.6 Croissances comparées . . . 9
3.7 Dérivée de $\ln u$ . . . 10
3.8 Équations et inéquations avec ln . . . 11
3.9 Logarithme décimal et changement de base . . . 11

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac 13

5 Exercices 15

6 Problème — *Le logarithme intégral et la fonction* Li ⭐⭐⭐ 17

7 Corrigés détaillés 18

1 Pourquoi étudier le logarithme ?

1.1 Le problème fondamental

Tu sais résoudre $x^2 = 5$ (racine carrée) et $2x + 3 = 7$ (équation affine). Mais comment résoudre $e^x = 5$? Ou $2^x = 1000$? Il te faut une opération qui « défait » l'exponentielle, exactement comme la racine carrée défait le carré. Cette opération, c'est le **logarithme népérien**.

Physique
décroissance radioactive

Acoustique
décibels (échelle log)

Chimie
$\text{pH} = -\log[H^+]$

Informatique
complexité $O(\log n)$

En physique : la datation au carbone 14 utilise $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$. Pour trouver l'âge t d'un fossile, il faut « inverser » l'exponentielle : $t = -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{N}{N_0}\right)$.

En informatique : la recherche dichotomique dans une liste de n éléments nécessite $\lceil \log_2 n \rceil$ étapes. C'est le logarithme qui mesure cette efficacité.

En musique : l'oreille perçoit les sons sur une échelle logarithmique (décibels). Doubler l'intensité ajoute $\approx 3\,\text{dB}$, pas le double.

1.2 L'idée directrice

L'idée directrice :

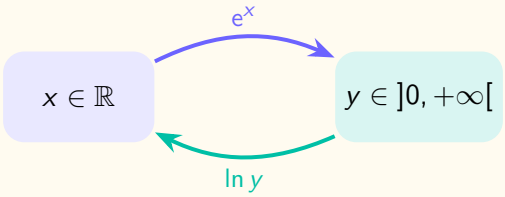
Le logarithme est la **réciproque de l'exponentielle** : il transforme les **produits en sommes**, les **puissances en produits**, et permet de résoudre toute équation où l'inconnue est en **exposant**.

2 L'idée avant la formule

2.1 La question fondatrice

Intuition | Quelle est la réciproque de e^x ?

$f(x) = e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$ (continue, strictement croissante). Par le corollaire du TVI, pour tout $y > 0$, l'équation $e^x = y$ admet une **unique** solution. On la note $\ln y$.



2.2 Le logarithme transforme les produits en sommes

Intuition | La propriété magique

La propriété fondamentale du logarithme est :

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

C'est ce qui rend le logarithme si puissant : il **ramène la multiplication à l'addition**. Historiquement, c'est pour cette raison que les logarithmes ont été inventés par Napier (1614) : pour simplifier les calculs astronomiques.

Conséquences immédiates :

- Diviser $\rightarrow$ soustraire : $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
- Élever à une puissance $\rightarrow$ multiplier : $\ln(a^n) = n \ln a$
- Racine $\rightarrow$ diviser : $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

2.3 Graphiquement : le miroir de l'exponentielle

Intuition | Symétrie par rapport à $y = x$

Comme ln est la réciproque de exp, les courbes $y = e^x$ et $y = \ln x$ sont **symétriques par rapport à la droite** $y = x$. Pour obtenir le graphe de ln, il suffit de « replier » celui de exp autour de cette droite.

Quelques repères utiles :

x	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2	10	100
$\ln x$	-1	0	1	2	$\approx 2{,}30$	$\approx 4{,}60$

Le logarithme croît **très lentement** : $\ln(100) \approx 4{,}6$ seulement.

3 Le cours formel

3.1 Définition du logarithme népérien

Définition | Logarithme népérien

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$. Sa bijection réciproque est appelée **logarithme népérien**, notée ln.
Pour tout $x > 0$:

$$\boxed{\ln x = y \iff x = \mathrm{e}^y}$$

Le logarithme népérien est défini sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété | Conséquences immédiates de la définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y > 0$:

- $\ln(\mathrm{e}^x) = x$ (le ln « annule » l'exponentielle)
- $\mathrm{e}^{\ln y} = y$ (l'exponentielle « annule » le ln)
- $\ln 1 = 0$ (car $\mathrm{e}^0 = 1$)
- $\ln \mathrm{e} = 1$ (car $\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$)

Démonstration | De $\ln(\mathrm{e}^x) = x$

Par définition : $\ln(\mathrm{e}^x) = y \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$ (l'exponentielle est injective). Donc $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.

Attention | ln n'est défini que pour $x > 0$

$\ln(0)$, $\ln(-3)$, $\ln(x^2 - 5)$ quand $x^2 - 5 \leqslant 0$: tout cela **n'existe pas**. Avant toute manipulation, vérifie que l'argument du ln est **strictement positif**.

3.2 Propriétés algébriques

Théorème | Relation fonctionnelle

Pour tous $a, b > 0$:

$$\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$$

Démonstration | Exigible au bac

On utilise les propriétés de l'exponentielle. Posons $\alpha = \ln a$ et $\beta = \ln b$, i.e. $a = \mathrm{e}^\alpha$ et $b = \mathrm{e}^\beta$. Alors :

$$ab = \mathrm{e}^\alpha \cdot \mathrm{e}^\beta = \mathrm{e}^{\alpha+\beta}$$

En appliquant ln : $\ln(ab) = \alpha + \beta = \ln a + \ln b$.

Propriété | Propriétés algébriques fondamentales

Pour tous $a, b > 0$ et tout $n \in \mathbb{Z}$:

1. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (produit → somme)
2. $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ (inverse → opposé)
3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ (quotient → différence)
4. $\ln(a^n) = n \ln a$ (puissance → produit)
5. $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln a$ (racine → moitié)

Démonstration | Des propriétés 2 à 5

2. $b \cdot \frac{1}{b} = 1$, donc $\ln b + \ln(\frac{1}{b}) = \ln 1 = 0$, d'où $\ln(\frac{1}{b}) = -\ln b$.
3. $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \cdot \frac{1}{b}) = \ln a + \ln(\frac{1}{b}) = \ln a - \ln b$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\ln(a^n) = \ln(\underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n}) = \underbrace{\ln a + \cdots + \ln a}_{n} = n \ln a$.
Pour $n = 0$: $\ln(a^0) = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln a$.
Pour $n < 0$: $\ln(a^n) = \ln(\frac{1}{a^{-n}}) = -\ln(a^{-n}) = -(-n)\ln a = n \ln a$.
5. $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln a$ (en étendant 4 à $n = \frac{1}{2}$, ce qui se justifie par $(\sqrt{a})^2 = a$, donc $2\ln\sqrt{a} = \ln a$).

Exemple | Calculs types

1. $\ln 8 = \ln 2^3 = 3\ln 2$.
2. $\ln\frac{3}{5} = \ln 3 - \ln 5$.
3. $\ln\frac{e^3}{\sqrt{e}} = \ln e^3 - \ln e^{1/2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.
4. $\ln 0{,}01 = \ln 10^{-2} = -2\ln 10 \approx -4{,}61$.
5. $\ln 72 = \ln(8 \times 9) = \ln 2^3 + \ln 3^2 = 3\ln 2 + 2\ln 3$.

Attention | Erreurs fréquentes sur les propriétés algébriques

- $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$ (**c'est le produit**, pas la somme !)
- $\ln(a \cdot b) \neq \ln a \cdot \ln b$ (le produit des ln n'a aucun sens ici)
- $(\ln a)^2 \neq \ln(a^2)$ ($\ln(a^2) = 2\ln a$, mais $(\ln a)^2$ est le carré de $\ln a$)
- $\frac{\ln a}{\ln b} \neq \ln\frac{a}{b}$ ($\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$)

3.3 Signe du logarithme

Propriété | Signe de $\ln x$

Pour tout $x > 0$:

- $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ si $x = 1$
- $\ln x > 0$ si $x > 1$

Démonstration

$\ln$ est strictement croissante (voir section suivante) et $\ln 1 = 0$. Donc : $x < 1 \Rightarrow \ln x < \ln 1 = 0$ et $x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1 = 0$.

Exemple

$\ln \frac{1}{2} < 0$ (car $\frac{1}{2} < 1$), $\ln 3 > 0$ (car $3 > 1$), $\ln \mathrm{e}^{-5} < 0$ (car $\mathrm{e}^{-5} < 1$).

3.4 Étude complète de la fonction $\ln$

Propriété | Dérivée du logarithme

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}}$$

Démonstration | Exigible au bac

$\ln$ est la réciproque de exp. Si $y = \ln x$, alors $x = \mathrm{e}^y$, donc en dérivant par rapport à x (dérivation de la réciproque) :

$$1 = \mathrm{e}^y \cdot y' = x \cdot y'$$

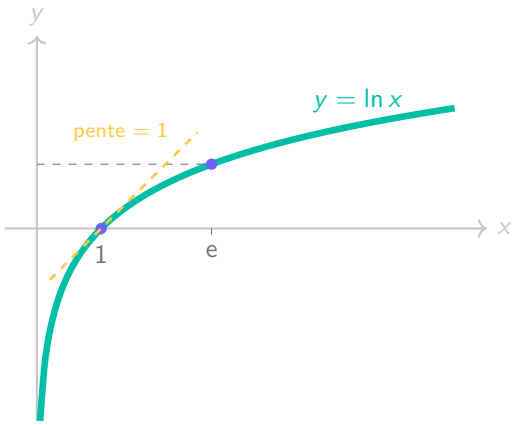
D'où $y' = \frac{1}{x}$.

Autre approche (taux d'accroissement) : par définition, $(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)$. En posant $t = h/x \to 0$: $\frac{1}{xt} \ln(1+t) \to \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$ (car $\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$).

Propriété | Variations et tableau

$\ln$ est **strictement croissante** sur $]0, +\infty[$ (car $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$).
$\ln$ est **concave** sur $]0, +\infty[$ (car $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$).

x	0^+		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



Propriété | Conséquences de la stricte croissance

Pour tous $a, b > 0$:

- $\ln a = \ln b \iff a = b$
- $\ln a < \ln b \iff a < b$
- $\ln a \leqslant \ln b \iff a \leqslant b$

Autrement dit : on peut « passer au ln » dans une inégalité (entre quantités positives) **sans changer le sens**.

3.5 Limites de référence

Théorème | Limites fondamentales

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

Démonstration

En $+\infty$: pour tout $A > 0$, si $x > \mathrm{e}^A$ alors $\ln x > A$ (car ln croissante). Donc $\ln x \to +\infty$.
En 0^+ : posons $t = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0^+$, $t \to +\infty$. $\ln x = \ln \frac{1}{t} = -\ln t \to -\infty$.

Propriété | Limites classiques en 0

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1}$$

C'est le **taux d'accroissement** de ln en 1 : $\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} \to (\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

3.6 Croissances comparées

Théorème | Croissances comparées — le résultat fondamental

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0}$$

En $+\infty$, le logarithme **croît moins vite** que toute puissance positive de x. On dit que $\ln x$ est **négligeable** devant x.

Démonstration | Exigible au bac

Pour $x > 0$, posons $x = \mathrm{e}^t$ (avec $t = \ln x$). Quand $x \to +\infty$, $t \to +\infty$.

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{t}{\mathrm{e}^t}$$

Or on sait que $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t} = 0$ (croissance comparée exp vs polynôme, déjà démontrée dans le chapitre sur exp). Donc $\frac{\ln x}{x} \to 0$.

Propriété | Variantes des croissances comparées

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$ — ($\ln$ négligeable devant x^α)
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x} = 0$ — (même $(\ln x)^n$ est négligeable devant x)
3. $\lim\limits_{x\to0^+} x \ln x = 0$ — (en 0^+, x l'emporte sur $\ln x$)
4. $\lim\limits_{x\to0^+} x^n \ln x = 0$ pour tout $n \geqslant 1$

Démonstration | De la variante 1

$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\ln(x^\alpha)}{x^\alpha}$. En posant $X = x^\alpha \to +\infty$: $\frac{\ln X}{X} \to 0$, donc $\frac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$.

Démonstration | De la variante 3

Posons $t = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0^+$, $t \to +\infty$.

$$x \ln x = \frac{1}{t} \ln \frac{1}{t} = -\frac{\ln t}{t} \to 0$$

par la croissance comparée fondamentale.

Exemple | Applications des croissances comparées

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim \dfrac{\ln x}{x^{1/2}} = 0.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^3}{x} = 0$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - 2\ln x) = \lim x\left(1 - \dfrac{2\ln x}{x}\right) = +\infty \cdot (1-0) = +\infty$.

4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$ (le x^2 l'emporte).

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x-1}$: on factorise par x au dénominateur : $\dfrac{\ln x}{x(1-1/x)} = \dfrac{\ln x}{x} \cdot \dfrac{1}{1-1/x} \to 0 \cdot 1 = 0$.

Attention | Comment retenir les croissances comparées

Classe les fonctions par « vitesse de croissance » en $+\infty$:

$$\underbrace{\ln x}_{\text{très lent}} \ll \underbrace{\sqrt{x}}_{\text{lent}} \ll \underbrace{x}_{\text{moyen}} \ll \underbrace{x^2}_{\text{rapide}} \ll \underbrace{\mathrm{e}^x}_{\text{explosif}}$$

Le logarithme est le **plus lent** de tous. L'exponentielle bat tout le monde.

3.7 Dérivée de $\ln u$

Propriété | Dérivée d'une composée

Si u est dérivable et strictement positive sur I, alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\ln u)' = \frac{u'}{u}}$$

Démonstration

C'est la règle de la chaîne. Si $f = \ln \circ u$, alors $f'(x) = (\ln)'(u(x)) \cdot u'(x) = \dfrac{1}{u(x)} \cdot u'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple | Dérivées à connaître

- $(\ln(2x+1))' = \dfrac{2}{2x+1}$ (pour $x > -\frac{1}{2}$)
- $(\ln(x^2+1))' = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $x^2+1 > 0$)
- $(\ln|\cos x|)' = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ (pour $\cos x \neq 0$)
- $(\ln(\ln x))' = \dfrac{1}{x \ln x}$ (pour $x > 1$)

Propriété | Primitive de $\frac{1}{x}$

Pour $x > 0$: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + C$.

Plus généralement : $\displaystyle\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|u(x)| + C$ (pour $u \neq 0$).

Retiens : quand tu vois $\frac{u'}{u}$, c'est $\ln|u|$. Ce réflexe est fondamental pour le calcul intégral.

3.8 Équations et inéquations avec ln

Méthode | Résoudre une équation avec ln

Stratégie 1 : se ramener à $\ln A = \ln B$. Utiliser les propriétés pour regrouper, puis $\ln A = \ln B \iff A = B$ (avec $A, B > 0$).
Stratégie 2 : exponentier. Si $\ln f(x) = k$, alors $f(x) = \mathrm{e}^k$.
Stratégie 3 : poser $X = \ln x$. Transformer en équation polynomiale en X.

Exemple | Équations résolues

1. $\ln(2x-1) = 3$. Condition : $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$.
$2x - 1 = \mathrm{e}^3$, donc $x = \frac{\mathrm{e}^3+1}{2} \approx 10{,}54$. Vérification : $x > \frac{1}{2}$ OK.
2. $\ln x + \ln(x+2) = \ln 3$. Conditions : $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 0$.
$\ln[x(x+2)] = \ln 3$, donc $x^2 + 2x = 3$, $x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x+3)(x-1) = 0$. Comme $x > 0$: $x = 1$.
3. $(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0$. Posons $X = \ln x$. $X^2 - 3X + 2 = 0$, $(X-1)(X-2) = 0$, $X = 1$ ou $X = 2$. Donc $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^2$.

Méthode | Résoudre une inéquation avec ln

Comme ln est **strictement croissante** :

$$\ln a \leqslant \ln b \iff a \leqslant b \quad (\text{pour } a, b > 0)$$

On ne change **pas** le sens de l'inégalité. Attention à bien vérifier que les arguments sont > 0.

Exemple

$\ln(3x-1) \leqslant 2$. Condition : $3x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{3}$.
$3x - 1 \leqslant \mathrm{e}^2$, $x \leqslant \frac{\mathrm{e}^2+1}{3} \approx 2{,}80$.
Solution : $x \in \left]\frac{1}{3} ; \frac{\mathrm{e}^2+1}{3}\right]$.

3.9 Logarithme décimal et changement de base

Définition | Logarithme en base quelconque

Pour $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

En particulier, le **logarithme décimal** (base 10) : $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Exemple

$\log_2 8 = \frac{\ln 8}{\ln 2} = \frac{3\ln 2}{\ln 2} = 3.$ $\log_{10} 1000 = \frac{\ln 10^3}{\ln 10} = 3.$ $2^x = 5 \iff x = \log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2{,}32.$

4 Boîte à outils — Réflexes pour le bac

Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Toujours vérifier le domaine :** $\ln(\dots)$ exige un argument > 0.
2. **Transformer avant de dériver :** simplifie $\ln(a^n) = n \ln a$ **avant** de dériver.
3. $\frac{u'}{u} \to \ln|u|$ **:** reconnaîs ce motif pour les primitives.
4. **Croissances comparées :** $\frac{\ln x}{x} \to 0$ et $x \ln x \to 0$ règlent 90% des limites.
5. $\ln$ **strictement croissante :** on peut comparer via $\ln$ sans changer le sens.

Méthode | Mots-clés à repérer

Tu lis dans l'énoncé...	Tu penses à...
« résoudre $e^x = \dots$ »	passer au $\ln$
« résoudre $\ln x = \dots$ »	exponentier
« étudier $f(x) = \ln(\dots)$ »	domaine (> 0) + $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
« limite de $\frac{\ln x}{\dots}$ »	croissances comparées
« limite de $x^\alpha \ln x$ en 0^+ »	$\to 0$ (croissance comparée)
« primitive de $\frac{u'}{u}$ »	$\ln\|u\| + C$
« $2^x = \dots$, $3^n = \dots$ »	$\ln$ des deux côtés

Attention | Top 5 des erreurs au bac

1. **Oublier le domaine.** $\ln(2x-3)$ n'existe que pour $x > \frac{3}{2}$. Penser à écrire les conditions de validité.
2. **Confondre** $\ln(a+b)$ **et** $\ln a + \ln b$**.** Le $\ln$ transforme les **produits** en sommes, pas les sommes.
3. **Confondre** $(\ln x)^2$ **et** $\ln(x^2)$**.** $\ln(x^2) = 2\ln x$ mais $(\ln x)^2 = (\ln x) \times (\ln x)$.
4. **Oublier la valeur absolue dans les primitives.** $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ (pas $\ln x$).
5. **Se tromper de sens dans les croissances comparées.** $\frac{\ln x}{x} \to 0$, pas $+\infty$. Le $\ln$ est toujours « le plus faible ».

Méthode | Récapitulatif

Résultat	Formule
Définition	$\ln x = y \iff x = \mathrm{e}^y \quad (x > 0)$
Relation fonctionnelle	$\ln(ab) = \ln a + \ln b$
Dérivée	$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$
Limites	$\lim_{0^+} \ln x = -\infty$, $\lim_{+\infty} \ln x = +\infty$
Croiss. comparée	$\frac{\ln x}{x} \to 0$ en $+\infty$, $\quad x \ln x \to 0$ en 0^+
Taux d'accroissement	$\frac{\ln(1+h)}{h} \to 1$ quand $h \to 0$
Changement de base	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

5 Exercices

Exercice 1 ⭐☆☆ — Calcul avec les propriétés

Simplifier sans calculatrice :

a) $\ln \mathrm{e}^5 - 2\ln \mathrm{e}$
b) $\ln 4 + \ln 25$
c) $\ln \dfrac{\mathrm{e}^3}{\sqrt{\mathrm{e}}}$
d) $\mathrm{e}^{2\ln 3}$
e) $\ln \sqrt[3]{\mathrm{e}^6}$
f) $3\ln 2 - \ln 4 + \ln 50$

Exercice 2 ⭐☆☆ — Domaine de définition

Déterminer l'ensemble de définition de :

a) $f(x) = \ln(3 - x)$
b) $g(x) = \ln(x^2 - 4)$
c) $h(x) = \ln(\ln x)$
d) $k(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

Exercice 3 ⭐☆☆ — Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $\ln(2x - 1) = 0$
b) $\ln x + \ln(x - 2) = \ln 3$
c) $\mathrm{e}^{2x} - 5\mathrm{e}^x + 6 = 0$
d) $2^x = 7$

Exercice 4 ⭐☆☆ — Inéquations

Résoudre :

a) $\ln(x - 1) > 0$
b) $\ln(3x + 2) \leqslant 1$
c) $\ln x + \ln(x + 2) \geqslant \ln 8$

Exercice 5 ⭐⭐☆ — Dérivées

Calculer la dérivée et préciser le domaine :

a) $f(x) = \ln(3x^2 - 1)$
b) $g(x) = x\ln x - x$
c) $h(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$
d) $k(x) = (\ln x)^2$

Exercice 6 ⭐⭐☆ — Limites et croissances comparées

Calculer :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x$
c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 - x$
d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$
e) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

« Le logarithme transforme les produits en sommes. »

Exercice 7 ⭐⭐☆ — Étude de fonction

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Calculer les limites en 0^+ et en $+\infty$.

b) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

c) En déduire que l'équation $\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{3}$ admet exactement deux solutions.

Exercice 8 ⭐⭐☆ — Étude de fonction avec paramètre

$f(x) = x - \ln x$ sur $]0, +\infty[$.

a) Limites, dérivée, tableau de variations.

b) Montrer que $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x > 0$ (inégalité $\ln x \leqslant x - 1$).

c) En déduire que pour tout $x > 0$: $\ln x \leqslant x - 1$.

Exercice 9 ⭐⭐☆ — Primitive et intégrale

a) Calculer $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

b) Calculer $\displaystyle\int_1^{2} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

c) Déterminer une primitive de $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$.

d) Calculer $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 10 ⭐⭐☆ — Suite et logarithme

$u_n = \ln\!\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer que $u_n > 0$ et que (u_n) est décroissante.

b) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ (somme télescopique).

c) Déterminer $\lim S_n$.

Exercice 11 ⭐⭐⭐ — Démonstrations

a) Démontrer que $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

c) Démontrer que pour tout $x > 0$: $\ln x \leqslant x - 1$ (avec égalité ssi $x = 1$).

Exercice 12 ⭐⭐⭐ — Fonction x^x

Soit $f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x \ln x}$ pour $x > 0$.

a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

b) Calculer $f'(x)$.

c) Étudier les variations de f et dresser son tableau.

d) Déterminer le minimum de f.

6 Problème — *Le logarithme intégral et la fonction* Li ⭐⭐⭐

Problème style prépa

Ce problème explore le **logarithme** sous l'angle de l'intégration : définition de ln comme intégrale, inégalités classiques, encadrements et lien avec la répartition des nombres premiers.

On définit pour $x > 0$: $L(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Partie A — L coïncide avec ln

1. Montrer que L est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $L'(x)$.
2. Calculer $L(1)$.
3. Montrer que pour tous $a, b > 0$: $L(ab) = L(a) + L(b)$.

   Indication : dans $\int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, couper en $\int_1^a + \int_a^{ab}$ et poser $t = au$.
4. En déduire que $L = \ln$.

Partie B — Encadrements intégraux

5. En encadrant $\frac{1}{t}$ sur $[k, k+1]$ ($k \geqslant 1$ entier), montrer :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln\!\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$

6. En sommant pour $k = 1, \dots, n-1$, montrer :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

7. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$ (divergence de la série harmonique).
8. Montrer que la suite $\gamma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est décroissante et minorée par 0. En déduire qu'elle converge vers une constante γ (constante d'Euler–Mascheroni, $\gamma \approx 0{,}577$).

Partie C — Inégalités classiques

9. Montrer que pour tout $x > -1$, $x \neq 0$: $\ln(1+x) < x$.

   Indication : étudier $g(x) = x - \ln(1+x)$.
10. En déduire que pour tout $x > -1$, $x \neq 0$: $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.
11. **(Bonus)** Montrer que pour tout $n \geqslant 1$: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

7 ✔✔ Corrigés détaillés

Exercice 1

a) $\ln e^5 - 2\ln e = 5 - 2(1) = 3$.

b) $\ln 4 + \ln 25 = \ln(4\times 25) = \ln 100 = \ln 10^2 = 2\ln 10$.

c) $\ln \frac{e^3}{\sqrt{e}} = \ln e^3 - \ln e^{1/2} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

d) $e^{2\ln 3} = e^{\ln 3^2} = e^{\ln 9} = 9$.

e) $\ln \sqrt[3]{e^6} = \ln e^{6/3} = \ln e^2 = 2$.

f) $3\ln 2 - \ln 4 + \ln 50 = \ln 2^3 - \ln 4 + \ln 50 = \ln \frac{8\times 50}{4} = \ln 100 = 2\ln 10$.

Exercice 2

a) $3 - x > 0 \iff x < 3$. $D_f =]-\infty, 3[$.

b) $x^2 - 4 > 0 \iff (x-2)(x+2) > 0 \iff x \in]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$. $D_g =]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$.

c) Il faut $x > 0$ (pour que $\ln x$ existe) **et** $\ln x > 0$ (pour que $\ln(\ln x)$ existe). $\ln x > 0 \iff x > 1$. $D_h =]1,+\infty[$.

d) $\frac{x+1}{x-2} > 0$: tableau de signes. Positif sur $]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$. $D_k =]-\infty,-1[\cup]2,+\infty[$.

Exercice 3

a) $\ln(2x-1) = 0 \iff 2x - 1 = e^0 = 1 \iff x = 1$. Condition $2x - 1 > 0 \iff x > \frac{1}{2}$: OK.

b) Condition : $x > 0$ et $x - 2 > 0$, soit $x > 2$. $\ln[x(x-2)] = \ln 3$, donc $x^2 - 2x = 3$, $x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x-3)(x+1) = 0$. Seul $x = 3 > 2$ convient.

c) Posons $X = e^x$ $(X > 0)$. $X^2 - 5X + 6 = 0$, $(X-2)(X-3) = 0$, $X = 2$ ou $X = 3$. Donc $x = \ln 2$ ou $x = \ln 3$.

d) $2^x = 7 \iff x\ln 2 = \ln 7 \iff x = \frac{\ln 7}{\ln 2} \approx 2{,}807$.

Exercice 4

a) Condition : $x - 1 > 0 \iff x > 1$. $\ln(x-1) > 0 \iff x - 1 > 1 \iff x > 2$. Solution : $x \in]2,+\infty[$.

b) Condition : $3x + 2 > 0 \iff x > -\frac{2}{3}$. $\ln(3x+2) \leqslant 1 \iff 3x + 2 \leqslant e \iff x \leqslant \frac{e-2}{3}$. Solution : $x \in \left]-\frac{2}{3}, \frac{e-2}{3}\right]$.

c) Conditions : $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 0$. $\ln[x(x+2)] \geqslant \ln 8 \iff x(x+2) \geqslant 8$ (car ln croissante). $x^2 + 2x - 8 \geqslant 0$, $(x+4)(x-2) \geqslant 0$. Comme $x > 0$: $x \geqslant 2$. Solution : $x \in [2,+\infty[$.

Exercice 5

a) $D_f = \{x \mid 3x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

$f'(x) = \frac{6x}{3x^2-1}$.

b) $D_g =]0,+\infty[$. $g'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$.

Remarque : $g'(x) = \ln x$, donc $g'(x) < 0$ pour $0 < x < 1$, $g'(x) = 0$ pour $x = 1$, $g'(x) > 0$ pour $x > 1$. Le minimum de g est $g(1) = -1$.

c) $D_h =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ (où $\frac{x+1}{x-1}>0$). On peut écrire $h(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ (quand les deux sont >0, i.e. $x>1$), d'où :

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{-2}{x^2-1}$.

d) $D_k=]0,+\infty[$. $k(x)=(\ln x)^2$. $k'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{2\ln x}{x}$.

Exercice 6

a) $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln x}{x^{1/2}}\to 0$ par croissance comparée ($\alpha=\frac{1}{2}$).

b) $x^2\ln x\to 0$ en 0^+ par croissance comparée (variante 4 avec $n=2$).

c) $(\ln x)^2-x=x\Big(\frac{(\ln x)^2}{x}-1\Big)$. Or $\frac{(\ln x)^2}{x}\to 0$ (variante 2 avec $n=2$), donc le facteur tend vers -1, et $x\to+\infty$: $(\ln x)^2-x\to-\infty$.

d) $\frac{\ln(x^2+1)}{x}$. Pour $x\to+\infty$, $x^2+1\sim x^2$, donc $\ln(x^2+1)\sim\ln(x^2)=2\ln x$. Ainsi $\frac{\ln(x^2+1)}{x}\sim\frac{2\ln x}{x}\to 0$.

e) $\frac{\ln x}{x-1}$. Posons $h=x-1\to 0$. $\frac{\ln(1+h)}{h}\to 1$ (taux d'accroissement de ln en 1). Donc la limite est **1**.

Exercice 7

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

a) En 0^+ : $\ln x\to-\infty$ et $x\to 0^+$, donc $f(x)\to-\infty$.

En $+\infty$: $\frac{\ln x}{x}\to 0$ par croissance comparée.

b) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x)=0\iff\ln x=1\iff x=\mathrm{e}$. $f'(x)>0$ pour $x<\mathrm{e}$, $f'(x)<0$ pour $x>\mathrm{e}$.

x	0^+		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

Maximum $f(\mathrm{e})=\frac{\ln\mathrm{e}}{\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0{,}368$.

c) $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{3}$, soit $f(x)=\frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3}<\frac{1}{\mathrm{e}}\approx 0{,}368$: la droite $y=\frac{1}{3}$ coupe la courbe en deux points.

Sur $]0,\mathrm{e}]$: f strictement croissante de $-\infty$ à $\frac{1}{\mathrm{e}}$, et $\frac{1}{3}\in]-\infty,\frac{1}{\mathrm{e}}[$: unique solution par le corollaire du TVI.

Sur $[\mathrm{e},+\infty[$: f strictement décroissante de $\frac{1}{\mathrm{e}}$ à 0, et $\frac{1}{3}\in]0,\frac{1}{\mathrm{e}}[$: unique solution par le corollaire du TVI.

Total : exactement **deux solutions**.

Exercice 8

$f(x)=x-\ln x$ sur $]0,+\infty[$.

a) En 0^+ : $x\to 0$ et $-\ln x\to+\infty$, donc $f(x)\to+\infty$.

En $+\infty$: $f(x)=x(1-\frac{\ln x}{x})\to+\infty\cdot(1-0)=+\infty$.

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. $f'(x)=0\iff x=1$. $f'<0$ sur $]0,1[$, $f'>0$ sur $]1,+\infty[$.

x	0^+		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

b) Le minimum de f est $f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$. Donc pour tout $x > 0$: $f(x) \geqslant 1$, i.e. $x - \ln x \geqslant 1$.

c) $x - \ln x \geqslant 1 \iff \ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.

Égalité quand $x = 1$ (l'unique minimum). C'est l'inégalité $\boxed{\ln x \leqslant x - 1}$, fondamentale en analyse.

Interprétation géométrique : la courbe $y = \ln x$ est entièrement en dessous de sa tangente en $(1, 0)$, qui est $y = x - 1$. Cela traduit la **concavité** de ln.

Exercice 9

a) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_1^{\mathrm{e}} = \ln \mathrm{e} - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

b) $\frac{2x}{x^2+1} = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 + 1$. Donc $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(x^2+1)]_1^2 = \ln 5 - \ln 2 = \ln\frac{5}{2}$.

c) $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 > 0$. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(x+1)}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 2x + 3$, $u' = 2x + 2 = 2(x+1)$. Primitive : $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3) + C$.

d) $\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \mathrm{e}^x + 1$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = [\ln(\mathrm{e}^x+1)]_0^1 = \ln(\mathrm{e}+1) - \ln 2 = \ln\Big(\frac{\mathrm{e}+1}{2}\Big)$.

Exercice 10

a) $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$. Comme $\frac{1}{n} > 0$, $1 + \frac{1}{n} > 1$, donc $u_n = \ln(1 + \frac{1}{n}) > 0$.

Décroissance : $u_{n+1} - u_n = \ln(1 + \frac{1}{n+1}) - \ln(1 + \frac{1}{n}) = \ln\Big(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\Big) = \ln\Big(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\Big)$.

Or $n(n+2) = n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, donc $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} < 1$ et $u_{n+1} - u_n < 0$.

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k]$: somme télescopique.

$S_n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$.

c) $S_n = \ln(n+1) \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Exercice 11

a) Posons $\alpha = \ln a$, $\beta = \ln b$ (i.e. $a = \mathrm{e}^\alpha$, $b = \mathrm{e}^\beta$). Alors $ab = \mathrm{e}^\alpha \cdot \mathrm{e}^\beta = \mathrm{e}^{\alpha+\beta}$. En appliquant ln : $\ln(ab) = \alpha + \beta = \ln a + \ln b$.

b) Pour $x > 0$, posons $x = \mathrm{e}^t$. Quand $x \to +\infty$, $t \to +\infty$. $\frac{\ln x}{x} = \frac{t}{\mathrm{e}^t}$.

Or pour $t \geqslant 0$: $\mathrm{e}^t \geqslant 1 + t + \frac{t^2}{2}$ (par convexité ou Taylor), donc $\frac{t}{\mathrm{e}^t} \leqslant \frac{t}{1+t+t^2/2} \leqslant \frac{t}{t^2/2} = \frac{2}{t} \to 0$.

Par le théorème des gendarmes (car $\frac{t}{\mathrm{e}^t} \geqslant 0$) : $\frac{\ln x}{x} \to 0$.

c) $g(x) = x - 1 - \ln x$ pour $x > 0$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

$g'(x) < 0$ sur $]0, 1[$, $g'(x) = 0$ en $x = 1$, $g'(x) > 0$ sur $]1, +\infty[$.

Minimum en $x = 1$: $g(1) = 0$. Donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$, avec égalité ssi $x = 1$.

D'où $\ln x \leqslant x - 1$ pour tout $x > 0$.

Exercice 12

$f(x) = x^x = \mathrm{e}^{x\ln x}$ pour $x > 0$.

a) $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (croissance comparée). Donc $\mathrm{e}^{x\ln x} \to \mathrm{e}^0 = 1$. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

b) Posons $\varphi(x) = x\ln x$, alors $f(x) = \mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

$\varphi'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$f'(x) = \varphi'(x)\cdot\mathrm{e}^{\varphi(x)} = (\ln x + 1)\cdot x^x$.

c) $f'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$ (car $x^x > 0$ toujours).

$f'(x) < 0$ pour $0 < x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ (car $\ln x < -1$), $f'(x) > 0$ pour $x > \frac{1}{\mathrm{e}}$.

x	0^+		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}}$	$\nearrow$	$+\infty$

d) Minimum : $f(\frac{1}{\mathrm{e}}) = (\frac{1}{\mathrm{e}})^{1/\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{-1/\mathrm{e}} \approx 0{,}692$.

Corrigé du problème

Partie A — L coïncide avec $\ln$

1. Par le théorème fondamental de l'analyse, $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $L'(x) = \frac{1}{x}$.

2. $L(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$.

3. $L(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^a \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = L(a) + \int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

Dans la seconde intégrale, posons $t = au$, $\mathrm{d}t = a\,\mathrm{d}u$. Quand $t = a$, $u = 1$; quand $t = ab$, $u = b$.

$$\int_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^b \frac{1}{au}\cdot a\,\mathrm{d}u = \int_1^b \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = L(b)$$

Donc $L(ab) = L(a) + L(b)$.

4. On a montré que L est dérivable, $L'(x) = \frac{1}{x} = (\ln x)'$, et $L(1) = 0 = \ln 1$. Deux primitives de $\frac{1}{x}$ ne diffèrent que d'une constante : $L(x) = \ln x + C$. Or $L(1) = \ln 1 = 0$: donc $C = 0$ et $L = \ln$.

Partie B — Encadrements intégraux

5. Sur $[k, k+1]$: $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ (car $k \leqslant t \leqslant k+1$ et $t \mapsto \frac{1}{t}$ décroissante). En intégrant sur $[k, k+1]$ (intervalle de longueur 1) :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(k+1) - \ln k = \ln\!\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

6. On somme l'encadrement pour $k = 1, \ldots, n-1$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln\!\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

Le terme central est télescopique : $\ln n - \ln 1 = \ln n$. À gauche, en reindexant ($j = k+1$) : $\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}$. D'où :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

« Le logarithme transforme les produits en sommes. »

7. De l'inégalité de droite : $\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$, donc $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geqslant \ln n \to +\infty$. La série harmonique **diverge**.

8. $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Montrons que (γ_n) est décroissante :

$$\gamma_n - \gamma_{n+1} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\Big) - \Big(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\Big) = \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1} = \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - \frac{1}{n+1}$$

Par l'encadrement de la question 5 avec $k = n$: $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(\frac{n+1}{n})$, donc $\gamma_n - \gamma_{n+1} \geqslant 0$.

Minorant : par l'inégalité de gauche de la question 6, $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n$, donc $\gamma_n = \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \leqslant 1 + \ln n - \ln n = 1$. Et par l'inégalité de droite : $\ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, donc $\gamma_n \geqslant 0$.

(γ_n) décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $\gamma \approx 0{,}5772$ (constante d'Euler–Mascheroni).

Partie C — Inégalités classiques

9. $g(x) = x - \ln(1+x)$ pour $x > -1$. $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

$g'(x) < 0$ sur $]-1, 0[$, $g'(x) = 0$ en $x = 0$, $g'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$.

Minimum en $x = 0$: $g(0) = 0$. Donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x > -1$, avec égalité ssi $x = 0$.

D'où $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$, avec égalité ssi $x = 0$.

Pour l'inégalité stricte ($x \neq 0$) : comme le minimum est atteint uniquement en 0, si $x \neq 0$ alors $g(x) > 0$, i.e. $\ln(1+x) < x$.

10. Appliquons l'inégalité $\ln(1+u) < u$ (pour $u \neq 0$, $u > -1$) à $u = \frac{-x}{1+x}$ (valide pour $x > -1$, $x \neq 0$, car $\frac{-x}{1+x} > -1 \iff \frac{1}{1+x} > 0$, vrai pour $x > -1$).

$\ln\big(1 + \frac{-x}{1+x}\big) < \frac{-x}{1+x}$, soit $\ln\big(\frac{1}{1+x}\big) < \frac{-x}{1+x}$, i.e. $-\ln(1+x) < \frac{-x}{1+x}$.

En multipliant par -1 (et renversant l'inégalité) : $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$.

Bilan : pour $x > -1$, $x \neq 0$: $\boxed{\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x}$.

11. (Bonus) De $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ avec $x = \frac{1}{n} > 0$:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) < \frac{1}{n}$$

En multipliant par n : $\frac{n}{n+1} < n\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1$.

L'inégalité de droite donne $n\ln(1 + \frac{1}{n}) < 1$, donc $\ln(1 + \frac{1}{n})^n < 1$, i.e. $(1 + \frac{1}{n})^n < \mathrm{e}$.

L'inégalité de gauche donne $\frac{n}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n})$, donc $1 < \frac{n+1}{n}\ln(1+\frac{1}{n}) = (n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$, i.e. $\mathrm{e} < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

Bilan : $(1 + \frac{1}{n})^n < \mathrm{e} < (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$.

Remarque : quand $n \to +\infty$, les deux bornes tendent vers e. On retrouve la définition classique $\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$.

Fin de la Fiche — Logarithme népérien

Tu maîtrises maintenant la définition, les propriétés algébriques, la dérivée, les limites et les croissances comparées du logarithme.

Ces outils sont indispensables pour l'intégration, les équations différentielles et les probabilités continues.

→ Prochaine fiche : Fonctions trigonométriques.

« Le logarithme transforme les produits en sommes. »